数理解析研究所講究録
689巻 1989年 172-184

ジーゲル保型形式のヘッケ作用素に関する2,3の話題

室工大工 桂田英典 (Hidenori Katsurada)

このノートでは、ジーゲル保型形式のヘッケ作用素に関する話題のうち、フーリエ係数と関連するいくつかのよく知られている事実を解説する。

§1 ヘッケ級数

この節においてヘッケ環に係数をもついくつかの形式的巾級数(これらをヘッケ級数と総称する)の有理性について論ずる。以下記号を用意する。

$$GSp_n^+(\mathbb{Q}) = \{ M \in GL_{2n}(\mathbb{Q}) \ ;\ \text{ある}\ \mu(M) > 0\ \text{が存在して}\ {}^tM J_n M = \mu(M) J_n \},$$

ただし $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$。

$$\Delta^n(N) = \{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GSp_n^+(\mathbb{Q}) \cap GL_{2n}(\mathbb{Z}_{(N)}) \ ;\ C \in N M_n(\mathbb{Z}_{(N)}) \}$$

ただし、$\mathbb{Z}_{(N)} = \left\{ \frac{b}{a} ;\ a, b \in \mathbb{Z} \quad (a, N) = 1 \right\}$。

$\Gamma_0^n(N) = \Delta^n(N) \cap SL_{2n}(\mathbb{Z})$。

さて $H^n(N)$ をヘッケ対 $(\Delta^n(N), \Gamma_0(N))$ の $\mathbb{C}$ 上のヘッケ環，素数 p $(p \nmid N)$ に対して $H^n{}_p(N)$ をヘッケ対 $(\Delta^n(N) \cap GL_{2n}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]), \Gamma_0^n(N))$ の $\mathbb{C}$ 上のヘッケ環とする。

$$H^n(N) = \bigotimes_{p \nmid N} H_p{}^n(N)$$

である。正の整数 $d_1, \ldots, d_n, e$ で $d_i \mid d_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ $(e, N) = 1, (d_1, N) = 1$ を満たすものに対して $H^n(N)$ の元 $T(d_1, \ldots, d_n; e)$ を

$$T(d_1, \ldots, d_n; e) = \Gamma_0(N) \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_n & & & \\ & & & e d_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e d_n^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_0(N)$$

で定義する。とくに素数 p $(p \nmid N)$ に対して

$$T_i(p) = T(\overbrace{1, \ldots, 1}^{n-i}, \overbrace{p, \ldots, p}^{i}; p^2)$$

とおく。また $(m, N) = 1$ なる正の整数 m に対して

$$T(m) = \sum_{d_1 | d_2 | \cdots | d_n | m} T(d_1, \ldots, d_n; m)$$

とおく。このとき $p \nmid N$ なる素数 p に対して

$$H_p{}^n(N) = \mathbb{C}[T(p), T_i(p) \ (0 \leq i \leq n)]$$

であり、さらに algebra isomorphism

$$\Omega_p : H_p{}^n(N) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_0^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^{W_n} \quad (\text{Satake 同型})$$

が存在する。ここで W_n は Sp_n のワイル群を表す。

さて我々は $T(p^r)$ $(r\geqq 1)$ を $T(p)$, $T_i(p^2)$ によって具体的に書き表すことを問題にする。これは $n=1$ のときはよく知られていることであるが $n\geqq 2$ のときには一般にはそうではない。そこで次のような $H_p^n(N)$ に係数をもつ形式的巾級数

$$F_p^n(t) = \sum_{d=0}^{\infty} T(p^d)\, t^d$$

を導入し、その有理性および分母・分子の形について考える。これについては、一般に次の結果が知られている。

((Andrianov [2])) $F_p^n(t)$ は t の有理関数で

$$F_p^n(t) = \frac{P_p^n(t)}{Q_p^n(t)}$$

と表される。ここで $P_p^n(t)$, $Q_p^n(t) \in H_p^n(N)[t]$ で $\deg P_p^n(t) = 2^n-2$ かつ

$$\tilde{\Omega}_p(Q_p^n(t)) = (1-X_0 t)\prod_{i=1}^{n}\prod_{1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n}(1-X_0X_{i_1}\cdots X_{i_r}t)$$

ここで $\tilde{\Omega}_p$ は前に述べた同型 Ω_p を $H_p^n(N)[[t]]$ から $\mathbb{C}[X_0^{\pm}, \ldots, X_n^{\pm}]^{W_n}[[t]]$ への同型に拡張したものである。

$n=1$ のときはよく知られているように

$$F_p(t) = \frac{1}{1 - T(p)t + T_1(p^2)t^2}$$

となる。$F_p^n(t)$ の具体的な形は現在のところ $n=1,2,3$ のときしか与えられていない[1]。

また、Böcherer は 次のようなヘッケ級数

$$G_p^n(t) = \sum_{d_1|d_2|\cdots|d_n} T(d_1,\cdots,d_n;1)\, t^{d_1+\cdots+d_n}$$

についてその具体的な形をもとめた。

((Böcherer [7]))

$$\tilde{\Omega}_p(G_p^n(t)) = \frac{1-t}{1-p^n t} \prod_{i=1}^{n} \frac{(1-p^{2i}t^2)}{(1-x_i p^n t)(1-x_i^{-1} p^n t)}$$

§2、Žarkovskaya の関係式

この節では、ヘッケ作用素の固有値とフーリエ係数の関係を述べた Žarkovskaya の関係式およびそれに関連する話題を述べる。χ を mod N のディリクレ指標で $\chi(-1)=(-1)^k$ とする。$M_k^n(N,\chi)$ を $\Gamma_0^n(N)$ に対する重さ k, 指標 χ のジーゲル保型形式の空間とする。とくに $N=1$, χ trivial のとき $M_k^n(N,\chi) = M_k^n$ と表す。$H^n(N)$ の元 T の $F(Z)$ への作用 $F|_{k,\chi}T$ をよく知られている方法で定義する。

$$F(Z) = \sum_A C(A)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}AZ)$$

を $F(Z)\in M_k^n(N,\chi)$ のフーリエ展開とする。$F(Z)$が$H^n(N)$のすべての元の同時固有関数[2)]とし、$T\in H^n(N)$ に対して$F|_{k,\chi}T = \lambda(T)F$ とおく。とくに mが正の整数のとき$\lambda(m)=\lambda(T(m))$ とおく。古典的には、ヘッケ作用素の同時固有関数とフーリエ係数の間には密接な関係があった。すなわち、上の仮定のもとで $(\ell,N)=1,(\ell,m)=1$なるすべてのℓに対して

$$C(\ell m) = \lambda(\ell)\,C(m) \qquad (*)$$

$n\geqq 2$のときは一般にはこのような簡明な関係式は存在しないが、ヘッケ級数と同時固有関数のフーリエ係数からなるある巾級数の間に関係が存在する。これが Žarkovskaya の関係式である。これを説明する。$F(Z)\in M_k^n(N,\chi)$ を上の通りとするとき巾級数 $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda(p^i)t^i$ は$t=0$ の近くで収束する巾級数で

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda(p^i)t^i = \frac{P_{p,F}^n(t)}{Q_{p,F}^n(t)}$$

と表される。ただし、$Q_{p,F}^n(t)$は前節で定義した多項式

$$Q_p^n(t) = \sum_{i=0}^{2^n} q_i t^i \qquad (q_i\in H_p^n(N))$$

に対して

$$Q_{p,F}^n(t) = \sum_{i=0}^{2^n}\lambda(q_i)t^i$$

とおいたものである。$P_{p,F}^n(t)$も同様に定める。このとき

((Žarkovskaya [12])) 定義、仮定は上の通りとする。Bをn次正定値、half integral かつ $(B,p)=1$ [3)] とする。このとき形式的巾級数 $\sum_{i=0}^{\infty} c(p^iB)t^i$ は $t=0$ の近くで収束し

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^iB)t^i = \frac{P^n_{p,F,B}(t)}{Q^n_{p,F}(t)}$$

となる。ここで $P^n_{p,F,B}(t)$ は（Bに依存する）tの多項式で $\deg P^n_{p,F,B}(t) \leqq 2^n-2$。

$n=1$のとき (*) より $p \nmid N$ のとき $(m,p)=1$ なるすべてのmについて

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i m) = \frac{c(m)}{1-\lambda(p)t+p^{k-1}\chi(p)t^2}$$

である。$n \geqq 2$のとき $P_{p,F,B}(t)$ を具体的に求めることは非常に難しい問題であると思われる。kが偶数、$k>n+1$ のとき重さk、次数nのジーゲル Eisenstein series $E_k(Z) = \sum_{C,D} |CZ+D|^{-k}$ は M^n_k の元ですべての$T \in H^n_k(N)$の同時固有関数であり、Žarkovskaya の関係式から $(B,p)=1$ のとき

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^iB)t^i = \frac{P_{p,F,B}(t)}{(1-t)\prod_{1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq n}\left(1-p^{\sum_{j=1}^{r}(k-i_j)}t\right)}$$

が得られる。しかし、この場合はもう少し詳しい結果が得られる。

《 Kitaoka [9] 》

$$\sum_{i=0}^{\infty} c(p^i B)\, t^i = \frac{\tilde{P}_{F,p,B}(t)}{\prod_{j=0}^{n} (1 - p^{jk - j(j+1)/2}\, t)}$$

ただし $\tilde{P}_{F,p,B}(t)$ は t の多項式で $\deg \tilde{P}_{F,p,B}(t) \leqq n-1$。

§3. ゼータ関数とディリクレ級数

$n=1$ のとき 前節で述べた固有値とフーリエ係数の関係は、同時固有関数に付随するあるゼータ関数とディリクレ級数の関係としても定式化できる。ここではその拡張について述べる。$F(Z) = \sum c(A) \exp(2\pi i \operatorname{tr} AZ) \in M_k^n(N, \chi)$ をすべての $T \in H^n(N)$ の同時固有関数とし、F の (Spinor) ゼータ関数 $\zeta(s, F)$ を

$$\zeta(s, F) = \prod_{p \nmid N} Q_{p,F}(p^{-s})$$

で定義する。$n=1$ のとき (*) から

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}}^{\infty} c(m)\, m^{-s} = c(1)\, \zeta(s, F)$$

である。このことの $n=2$ への拡張を考える。$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ を2次の正定値, half integral 行列とし、$\Delta = b^2 - 4ac$ とおく。また

$$H(\Delta) = \left\{ A_i = \begin{pmatrix} a_i & \frac{b_i}{2} \\ \frac{b_i}{2} & c_i \end{pmatrix} ;\ A_i \text{ half integral } b_i^2 - 4a_i c_i = \Delta \right\} \Big/ \text{properly equivalence}$$

とする。d を $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ の判別式、$l = \sqrt{\Delta/d}$ とし, O_l を conductor l の $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ の order とするとき, $H(\Delta)$ はガウス

積に関してアーベル群をなし、さらに$\mathcal{O}_\ell$のイデアル類群$I(\Delta)$と同型である：$\varphi: H(\Delta) \xrightarrow{\sim} I(\Delta)$。また、$\check{H}(\Delta)$, $\check{I}(\Delta)$をそれぞれ$H(\Delta)$, $I(\Delta)$の指標群とする。以下しばしば$H(\Delta)$と$I(\Delta)$，および$\check{H}(\Delta)$と$\check{I}(\Delta)$を同一視する。$\eta \in \check{H}(\Delta)$に対してL関数
$L_{\mathcal{O}_\ell}(s,\eta)$を $L_{\mathcal{O}_\ell}(s,\eta) = \prod_{\mathfrak{z}} \left(1-\chi(N(\mathfrak{z}))\,\eta(\bar{\mathfrak{z}})\,N(\mathfrak{z})^{-s}\right)^{-1}$
で定義する。ここで$\mathfrak{z}$は$\mathcal{O}_\ell$のすべての素イデアルでそのノルム$N(\mathfrak{z})$がNでわりきれないものすべてを走る。また$\bar{\mathfrak{z}}$は$\mathfrak{z}$のイデアル類を表す。n次正定値 half integral 行列 Bと
$F(Z) = \sum C(A)\exp(2\pi i\,\mathrm{tr}AZ) \in M_k^n(N,\chi)$ に対して、ディリクレ級数 $D(s,B,F)$を

$$D(s,B,F) = \sum_{\substack{m=1 \\ (m,N)=1}}^{\infty} \frac{C(mB)}{m^s}$$

で定義する。

(Andrianov [3], Evdokimov [8])

$F(Z) \in M_k^2(N,\chi)$を$H^2(N)$の同時固有関数とするとき $a|N^\infty$なるすべてのaと$\eta \in \check{H}(\Delta)$に対して

$$\sum_{\bar{A}_i \in H(\Delta)} \eta(\bar{A}_i)\, D(s, aA_i, F)$$

$$= \sum_{\bar{A}_i \in H(\Delta)} \eta(\bar{A}_i) \sum_{\substack{u|v|\ell \\ (u,N)=1 \\ (v,N)=1}} \frac{\chi(uv)\,M(u)\,M(v)}{u^{s-2k+3}\, v^{s-k+2}}\, C\!\left(\frac{v}{u}\left(\mathfrak{z}(\bar{A}_i)\right)\right)$$

が $\mathrm{Re}\, s > 2k+1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ なる $s \in \mathbb{C}$ で成立する。とく

に F が cusp form のときは $\mathrm{Re}\,s > k+1+\varepsilon$ で成立する。ただし μ はメービウス関数で ξ は $I(\Delta)$ から $I(\Delta l^{-2} i^{2})$ への自然な準同型。

この結果より $\zeta(s, F)$ の meromorphy および関数等式が証明される。[4] また上の結果より $k \geqq 4$ ならば $H^2(1)$ の同時固有関数 $F \in M_k^2$ は固有値および $\{C(A)\,;\,A$ は primitive，正定値 halfintegral$\}$ によって一意的に決ることがわかる。しかし固有値のみによって (up to constantに) 決るかどうかという いわゆる "multiplicity one condition" が成立するかどうかはわかっていない。$\zeta(s, F)$ と $D(s, B, F)$ の関係については現在のところ $n=1,2$ の場合しか明快な結果は得られていない。

一方 これとは別のゼータ関数とあるディイリクレ級数の間には 一般の n について次のような関係が知られている。まず 多項式 $R(x_0, \ldots, x_n, t) = \prod_{i=1}^{n}(1-x_i t)(1-x_i^{-1} t)$ は $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]^{W_n}[t]$ の元であるから $p \nmid N$ のときある多項式 $R_p(t) = \sum_{i=1}^{2n} r_i t^i \in H_p^n(N)$ が存在して $\widetilde{\Omega}_p(R_p(t)) = R(x_0, \ldots, x_n, t)$ となる。$F \in M_k^n(N, \chi)$ を $H^n(N)$ の同時固有関数とするとき $R_{p,F}(t) = \sum_{i=0}^{2n} \lambda(r_i) t^i$ とおく。このとき $\zeta^+(s, F)$ を

$$\zeta^{+}(s,F)^{5)} = \prod_{p\nmid N} R_{p,F}(\chi(p)p^{-s})$$

で定義する。また n 次正定値 half integral 行列 A_0 に対して

$$B_p(s,A_0) = \frac{1-p^{-2s}\chi(p^2)}{1-p^{-s}\chi(p)}$$

$$\times \begin{cases} (1-\chi_{A_0}(p)\chi(p)p^{-k-s}) \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (1-p^{-2i-2s}\chi(p^2)) & n \text{ 偶数} \\ \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (1-p^{-2i-2s}\chi(p^2)) & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

とおく。ただし χ_{A_0} は A_0 に対応する二次形式の sign を表す。

《Andrianov [4]》 $2A_0 \in GL_n(\mathbb{Z})^{6)}$ のとき

$$\sum_{\substack{M\in GL_n(\mathbb{Z})\backslash M_n(\mathbb{Z}) \\ \det M>0 \\ (\det M, N)=1}} \frac{C(MA_0{}^tM)}{(\det M)^s} = C(A_0)\prod_{p\nmid N} B_p(s-k+1,A_0)\,\zeta^{+}(s-k+1,F)$$

注

1) $n=2$ のとき Shimura [10], $n=3$ のとき Andrianov [1]。

2) 以下 $H^n(N)$ の元 T と T の $M_k^n(N,\chi)$ への作用 $|_{k,\chi}T$ を同一視する。

3) half integral 行列 $B=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ に対して $(b_{ii}\ (1\le i\le n)\quad 2b_{ij}\ (1\le i<j\le n),\ p)=1$ のとき $(B,p)=1$ と表す。

4) Andrianov [3]。

5) $\zeta^{+}(s, F)$ の meromorphy, および関数等式については Shimura [11], Andrianov-Kalinin [5], Böcherer [6] を参照せよ。

6) 実際はこの仮定はとり除かれるが、結果はやや複雑になる。

Reference

[1] A. N. Andrianov, Shimura's conjecture for Siegel modular group of genus 3, Soviet Math. Dokl. vol.8 No.6 (1967) 1474 - 1478

[2] ______________, Spherical functions for GLn over local fields and summation of Hecke series, Math. USSR Sb. 12, No3, (1970) 429-452

[3] ______________, Dirichlet series with Euler product in the theory of Siegel modular forms of degree 2, Proc. Steklov Inst. Math. 112 (1971) 70-93

[4] ______________, Euler expansions of theta transforms

of Siegel modular forms of degree n, Math. USSR Sb. 34 No 3, (1978) 259–300

[5] A.N. Andrianov and V.L. Kalinin, On analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms, Math. USSR Sb. 35 No 1, (1979) 1–17

[6] S. Böcherer, Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe, J. reine angew. Math. 362 (1985) 146–168

[7] ________, Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56 (1986) 35–47

[8] S.A. Evdokimov, Euler products for congruence subgroups of the Siegel group of genus 2, Math. USSR Sb. 28 (1976)

[9] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, Nagoya Math. J. 103 (1986) 149–160

[10] G. Shimura, On modular correspondences for $Sp(n, \mathbb{Z})$ and their congruence relations, Proc Natl. Acad. Sci. USA 49 No 6, (1963) 824–828

[11] ________, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. Lond. Math. Soc. III Ser. 31 (1975) 79–98

[12] N.A. Žarkovskaya, On the connection between the eigenvalues of Hecke operators and the Fourier coefficients of eigen functions for Siegel's modular forms of genus n. Math. USSR Sb. 25 (1975)